東京工業大学 AO 第一問

$0 < \alpha < \pi$ とする。xyx 空間上の 3 点 A, B, C は次の条件 $(i)(ii)(iii)$ をみたすように配置してあるとする。

(i) A, B は原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上にある。
(ii) C は z 軸の正の部分にある。
(iii) $\angle ACB = \alpha$

$(i), (ii), (iii)$ を満たす A, B, C と原点 O が作る四面体 $OABC$ のうち体積が最大のものの体積を $V(\alpha)$ とする。このとき極限値 $\lim_{\alpha \to 0} \alpha V(\alpha)$ を求めよ。

解答

$\angle AOB = \theta$ とおく。C が z 軸の正の部分にあるための条件は

$$\angle ACB < \angle AOB \Leftrightarrow \alpha < \theta \ (< \pi)$$

$C(0, p)$ とおくと余弦定理から

$$\cos\alpha = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2(1+p^2) - 4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2(1+p^2)}$$
$$= \frac{\cos\theta + p^2}{1+p^2}$$

$\cos\alpha = k$ とおくと $p^2 = \dfrac{k - \cos\theta}{1-k}$ $(\because k = \cos\alpha \neq 1)$

α を固定したときの $OABC$ の体積を $V_\alpha(\theta)$ とする。

$$V_\alpha(\theta) = \frac{1}{3} \cdot OC \cdot \triangle OAB = \frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\theta$$

両辺二乗して整理すると

$36(1-k)V_\alpha^2(\theta) = (1 - \cos^2\theta)(k - \cos\theta)$

$-1 < t = \cos\theta < \cos\alpha = k$ とおき右辺を $f(t)$ とすると $f(t) = (1-t^2)(k-t)$

$f'(t) = 3t^2 - 2kt - 1 = 0$ を解いて $t = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2+3}}{3}$

$-1 < \dfrac{k - \sqrt{k^2+3}}{3} < k$ かつ $t = \dfrac{k - \sqrt{k^2+3}}{3}$ の前後で $f'(t)$ の符号は正から負になる

のでこのとき f(t) は極大である。したがって

$$
\begin{aligned}
36(1-k)V(\alpha)^2 = (1-t^2)(k-t) &= \frac{2(1-kt)}{3}\cdot(k-t) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{3-k^2+k\sqrt{k^2+3}}{3}\cdot\frac{2k+\sqrt{k^2+3}}{3} \\
&= \frac{2}{27}\cdot g(k)
\end{aligned}
$$

ただし $g(k) = \left(3-k^2+k\sqrt{k^2+3}\right)\left(2k+\sqrt{k^2+3}\right)$

$$
\begin{aligned}
V(\alpha) = \sqrt{\frac{g(k)}{27\cdot 18(1-k)}} &= \sqrt{\frac{g(k)}{27\cdot 36\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \\
&= \frac{1}{6\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{g(k)}{27}}
\end{aligned}
$$

$\alpha \to 0$ のとき $k = \cos\alpha \to 1$ なので
$g(k) = \left(3-k^2+k\sqrt{k^2+3}\right)\left(2k+\sqrt{k^2+3}\right) \to (3-1+2)(2+2) = 16$

$$
\therefore \lim_{\alpha\to 0}\alpha V(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{6\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{g(k)}{27}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sqrt{\frac{g(k)}{27}} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}} = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{27}}
$$