問 I-2

n を自然数、$P(x)$ を n 次多項式とする。$P(0)$、$P(1)$、…、$P(n)$ が整数ならば、すべての整数 k に対し、$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

$$
\begin{cases}
p_0(x) &= 1 \\
p_1(x) &= x-1 \\
p_2(x) &= \dfrac{(x-1)(x-2)}{2!} \\
\cdots \\
p_i(x) &= \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-i)}{i!} \\
\cdots
\end{cases}
$$

とおくと、一般に n 次多項式は、$p_0(x)$、$p_1(x)$、$p_2(x)$、…、$p_n(x)$ の定数倍の和（線形結合）である。

多項式の次数に関する数学的帰納法でこれを証明する。

まず、定数多項式については明らかである。

つぎに、$m-1$ 次以下の任意の多項式についていえたとすると、任意の m 次多項式

$$f(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m$$

に対し、

$$f(x) - \alpha_0 m! p_m(x) = g(x)$$

とおけば、$g(x)$ は $m-1$ 次以下であるので、帰納法の仮定により

$$g(x) = \beta_1 p_{m-1}(x) + \beta_2 p_{m-2}(x) + \cdots + \beta_{m-1} p_1(x) + \beta_m p_0(x)$$

とおける。

よって、$f(x)$ も

$$f(x) = \alpha_0 m! p_m(x) + \beta_1 p_{m-1}(x) + \cdots + \beta_{m-1} p_1(x) + \beta_m p_0(x)$$

そこで、我々の $P(x)$ を

$$P(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x)$$

とおく。すると

$$
\begin{cases}
P(1) &= a_0 \\
P(2) &= a_0 + a_1 \\
P(3) &= a_0 + 2a_1 + a_2 \\
P(4) &= a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3 \\
\cdots \\
P(n) &= a_0 + {}_n\mathrm{C}_1 a_1 + {}_n\mathrm{C}_2 a_2 + a_{n-1}
\end{cases}
$$

また、

$$P(0) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

となる。
　したがって

$$P(0)、P(1)、\cdots、P(n) \text{ がみな整数}$$

であるという過程から、

$$a_0、a_1、a_2、\cdots、a_n$$

であることが導かれる。
　一方、$p_0(x)$、$p_1(x)$、…、$p_n(x)$ は、いずれも x に整数 k を代入すると整数になる（連続する m 個の整数の積は、$m!$ の倍数である）。
　よって、任意の整数 k に対し、

$$P(k) = a_0 p_0(k) + a_1 p_1(k) + \cdots + a_n p_n(k)$$

は整数である。

0．3 による解説

平成５年の東工大前期で似たような問題が出ています。違いは、「n 次の多項式」と、「の」が入っていることですｗこの解答のポイントは $P(x)$ を

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

とおくのをやめ、上に示したようにかけるかどうかです。実際に大学に入るとほとんど定石のような手法になっています。なお、これは去年の駿台のテキスト・代ゼミの東大模試、今年の大数の５月号（未確認）にも乗っている定番の問題なので、やっている人とやっていない人の差が大きく出てしまう問題でしょう。